Tight 4-DesignとTight 4-Orthogonal Arrayについて (有限群論)

野田, 隆三郎

数理解析研究所講究録
344巻 1979年 1-4

tight 4-design と tight 4-orthogonal array について

阪大教養 野田隆三郎

t-(v, k, λ) design と orthogonal array $OA(N, n, q, t)$ は一応 別個の組合せ論的対象であるがこれら二つは association scheme の観点から見る時 全く同種のものとみなすことができることを最初に示したのは P. Delsarte [2] である。つまり t-(v, k, λ) design の Johnson scheme $J(v, k)$ の部分集合としての存在位置と $OA(N, n, q, t)$ の Hamming scheme $H(n, q)$ の部分集合としての存在位置は association scheme の観点から見る時 ある共通の概念のもとに同一のものとみることができるというのである。このような観点からみる時、従来 別個の不等式と考えられていた $2s$-(v, k, λ) design における Generalized Fischer's inequality $b \geq \binom{v}{s}$ と $OA(N, n, q, 2s)$ における Rao's inequality $N \geq 1 + n(q-1) + \binom{n}{2}(q-1)^2 + \cdots + \binom{n}{s}(q-1)^s$ は全く同種のものとみなせるし 実際 association scheme の観点から両者を統一的に同時に証明することができる。

ところで上の二つの不等式で等号のなりたつものをそれぞれ tight $2s$-design, また tight $2s$-orthogonal array と呼ぶことにすると それら tight $2s$-design, tight $2s$-orthogonal array を分類せよという問題が自然に生まれてくる. $s \geqq 4$ の場合については各 s に対して tight $2s$-design, tight $2s$-orthogonal array はあったとしても高々有限個しか存在しないことが坂内によって証明されている. また $s=3$ の場合については Peterson と Reuver によって分類は完成されている. ここでは $s=2$ の場合, つまり tight 4-design と tight 4-orthogonal array の分類に関する結果を報告する.

定理1 ([3]). tight 4-(v, k, λ) design (ここで $v \geqq 2k$) が存在すれば

(1) $(v, k, \lambda) = (23, 7, 1)$ であるか

(2) 不定方程式 $2Y^2 = 3 + X\sqrt{3X^2-2}$ は $(X, Y) = (3, 3)$ 以外の整数解をもつ

定理2 ([4]). tight-$OA(N, n, q, 4)$ が存在すれば次のいずれかがなりたつ

(1) $(N, n, q) = (2^4, 5, 2)$,

(2) $(N, n, q) = (3^5, 11, 3)$.

(3) $(N, n, \delta) = \left(\frac{9}{2}a^2(9a^2-1),\ \frac{1}{5}(9a^2+1),\ 6\right)$ ここで a は $a \equiv 3 \pmod 6$, $a \equiv \pm 1 \pmod 5$, $a \equiv 5 \pmod{16}$ なる正整数.

定理1における不定方程式はその後 A. Bremner [1] によって解かれたので tight 4-design の分類は完全に終っている. 定理2における $OA(2^4, 5, 2, 4)$ と $OA(3^5, 11, 3, 4)$ は実際に存在し存在は unique である. 前者は自明な perfect code $2^5 \supset 2^1$ の. また後者は ternary Golay code $3^{11} \supset 3^6$ の dual code である. 定理2の (3) の parameter をもつ orthogonal array が実際に存在するかどうかは知られていない.

定理1, 2の証明には全く同様の議論が適用できる. どちらの場合もいろいろの parameter の整数性, とりわけ association matrix の固有値の整数性が重要な役割をはたす.

参考文献

[1] A. Bremner, to appear in Osaka J. Math.

[2] P. Delsarte, "An algebraic approach to the association schemes of coding theory", Philips Res. Reports Suppl. 1973, No10.

[3]. H. Enomoto, N. Ito and R. Noda "On tight 4-designs" to appear in Osaka J. Math.

[4]. R. Noda, "On orthogonal arrays of strength 4 achieving Rao's bound", to appear in Jour. London Math. Soc.